Tripoli university

Faculty of engineering

EE department EE313

(Fall 2012)

Solved problems on "uniform plane waves in empty space".

ENG. Abdullah Aiad Abograin.

* ملخص القوانين :

1) معادلة المجال الكهربائي لموجة تتحرك في اتجاه $\pm z$:

$$\hat{E}_x(z) = \underbrace{\hat{E}_m^+ e^{-j\beta_o z}}_{\text{موجة تتحرك في اتجاه } +z} + \underbrace{\hat{E}_m^- e^{j\beta_o z}}_{\text{موجة تتحرك في اتجاه } -z} \quad (V/m)$$

حيث أن :-

$\hat{E}_m^+$: أقصى اتساع للمجال الكهربائي للموجة المتحركة في اتجاه $+z$.

$\hat{E}_m^-$: أقصى اتساع للمجال الكهربائي للموجة المتحركة في اتجاه $-z$.

وبشكل عام فإن $\hat{E}_m^+$ و $\hat{E}_m^-$ أعداد مركبة ، أي أنها تعرف بمقدار وزاوية $\hat{E}_m^+ = E_m^+ e^{j\phi^+}$ و $\hat{E}_m^- = E_m^- e^{j\phi^-}$.

2) كثافة الفيض المغناطيسي المرافق للمجال الكهربي يعطى كالتالي :-

$$\hat{B}_y(z) = \hat{B}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{B}_m^- e^{j\beta_0 z} \qquad (T)$$

$$= \underbrace{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}\, \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z}}_{\text{موجة تتحرك في اتجاه } +z} - \underbrace{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}\, \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}}_{\text{موجة تتحرك في اتجاه } -z}$$

حيث أن $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ، c : سرعة الضوء $(3\times10^{8}\, m/s)$.

3) غالباً ما يستخدم H "شدة المجال المغناطيسي" بدلاً من B :-

$$\hat{H}_y(z) = \hat{H}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{H}_m^- e^{j\beta_0 z} \qquad (A/m)$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z} - \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}$$

$$= \frac{\hat{E}_m^+}{\eta_0} e^{-j\beta_0 z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\eta_0} e^{j\beta_0 z}$$

*حيث $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ تمثل معاوقة الموجة في الفراغ وتساوي $\simeq 120\pi$.

*حيث $B = \mu H$.

4) المعادلات ① و ② و③ معطاة في الصورة المركبة . للتعبير عن المجالات في الصورة الزمنية الحقيقية :-

$$E_x(z,t) = Re\{\hat{E}_x(z)\, e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\{E_m^+ e^{j\phi^+} e^{-j\beta_o z} e^{j\omega t} + E_m^- e^{j\phi^-} e^{j\beta_o z} e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\{E_m^+ e^{j(\omega t - \beta_o z + \phi^+)} + E_m^- e^{j(\omega t + \beta_o z + \phi^-)}\}$$

$$= \underbrace{E_m^+ \cos(\omega t - \beta_o z + \phi^+)}_{\text{موجة تتحرك في اتجاه } +z} + \underbrace{E_m^- \cos(\omega t + \beta_o z + \phi^-)}_{\text{موجة تتحرك في اتجاه } -z}$$

وبالمثل يمكن التعبير عن B أو H في الصورة الزمنية :-

$$B_y(z,t) = \sqrt{\mu_o \epsilon_o}\, E_m^+ \cos(\omega t - \beta_o z + \phi^+) - \sqrt{\mu_o \epsilon_o}\, E_m^- \cos(\omega t + \beta_o z + \phi^-)$$

$$H_y(z,t) = \frac{E_m^+}{\eta_o} \cos(\omega t - \beta_o z + \phi^+) - \frac{E_m^-}{\eta_o} \cos(\omega t + \beta_o z + \phi^-)$$

5) β_o "phase constant" يعطى بالعلاقة

$$\beta_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o} \;\; (rad/m) \;\; , \;\; \omega = 2\pi f$$

6) λ الطول الموجي "wave length" :-

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f}$$

7) سرعة انتشار الموجة V_p :-

$$V_p = \frac{\omega}{\beta_o} = c$$

أي أن الموجة الكهرومغناطيسية تنتشر في الفراغ بسرعة الضوء

8) إذا رمزنا لمتجه الوحدة في اتجاه انتشار الموجة بالرمز $\vec{a}_k$ ولمتجه الوحدة في اتجاه المجال الكهربي بالرمز $\vec{a}_e$ ولمتجه الوحدة في اتجاه المجال المغناطيسي بالرمز $\vec{a}_h$ فإن العلاقة التالية يجب أن تتحقق

$$\vec{a}_e \times \vec{a}_h = \vec{a}_k$$

Problem #1

Show that $\hat{E}_x(z) = A e^{j(\beta_o z + \phi)}$ is a solution of equation (2-112) for $\beta_o = \omega\sqrt{\mu_o \epsilon_o}$

Solution

إذا كان $A e^{j(\beta_o z+\phi)}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (2-112) فإنه يحققها :-

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(A e^{j(\beta_o z+\phi)}\right) + \beta_o^2 \left(A e^{j(\beta_o z+\phi)}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dz}\left(j\beta_o A e^{j(\beta_o z+\phi)}\right) + \beta_o^2 A e^{j(\beta_o z+\phi)} = 0$$

$$-\beta_o^2 A e^{j(\beta_o z+\phi)} + \beta_o^2 A e^{j(\beta_o z+\phi)} = 0$$

#

Problem #2

A uniform wave in free space has:

$$E = 10 \cos(2\pi \times 10^6 t - \beta z)\, \vec{a_y}$$

a) What is the direction of propagation.

b) Calculate β and λ.

c) Find H.

Solution

a)

اتجاه انتشار الموجة هو $+z$ كما هو واضح من الإشارة السالبة
لـ βz .

b)

بمقارنة المجال الكهربي في المسألة بالصورة العامة ~~للموجة~~ لمجال
كهربي لموجة متحركة في اتجاه $+z$:-

$$E = E_m \cos(\omega t - \beta z)$$

نجد أن $\omega = 2\pi \times 10^6$ ومن ذلك :-

$$\beta_o = \omega\sqrt{\mu_o \epsilon_o} = 0.021 \text{ rad/m.}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_o} \cong 300 \text{ m.}$$

c)

أولاً يجب أن نعرف القيمة القصوى لـ H :-

$$H_m = \frac{E_m}{\eta_o} = \frac{10}{120\pi} = 0.0265 \text{ A/m.}$$

أما بالنسبة لاتجاه H فمن العلاقة :-

$$\vec{a}_e \times \vec{a}_h = \vec{a}_k$$

حيث لدينا في المسألة $\vec{a}_k = \vec{a}_z$ و $\vec{a}_e = \vec{a}_y$ ومن ذلك :

$$\vec{a}_h = -\vec{a}_x$$

$$\therefore H(z,t) = -0.0265 \cos(2\pi \times 10^6 t - 0.021z)\, \vec{a}_x \text{ (A/m)}$$

Problem #3

The magnetic field component of an electro-magnetic ~~field~~ wave propagating through free space is:

$$H(z,t) = 25 \sin(\omega t + 6x)\, \vec{a}_y \quad \text{(mA/m)}$$

Determine :-

a) The direction of wave propagation.

b) The frequency of the wave.

c) The electric field intensity.

Solution

a)

اتجاه انتشار الموجة هو X- .

b)

$$\beta_o = 6 = \omega\sqrt{\mu_o \epsilon_o} \Rightarrow \omega = \frac{6}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = 18\times10^{8} \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 286.5 \text{ MHz}.$$

c)

أولاً : القيمة القصوى لـ E :-

$$E_m = \eta_o H_m = 120\pi \times 25\times10^{-3} = 9.425 \text{ (V/m)}$$

أما بالنسبة للاتجاه :-

$$\vec{a}_h = \vec{a}_y \ , \ \vec{a}_k = -\vec{a}_x \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{a}_z$$

$$\therefore E(x,t) = 9.425 \cos(18\times10^{8} t + 6x)\, \vec{a}_z \quad \text{(V/m)}.$$

Problem #4

The magnetic field of a uniform plane wave is given by $\hat{H} = \vec{a}_z \, 10 e^{-j10y}$.

a) Find $\hat{E}$

b) Find the time domain forms for E and H.

Solution

a)

اتجاه انتشار الموجة $\vec{a}_y$.

اتجاه المجال المغناطيسي $\vec{a}_z$.

∴ اتجاه المجال الكهربائي $-\vec{a}_x$ ..

$$\therefore \hat{E} = -\vec{a}_x \,(10 \times 120\pi)\, e^{-j10y}$$

$$= -\vec{a}_x \, 1200\pi \, e^{-j10y} \quad (V/m)$$

b)

$$H(y,t) = Re\left\{\hat{H}(y)\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$= Re\left\{\vec{a}_z 10 e^{-j10y} \, e^{j\omega t}\right\}$$

$$= Re\left\{\vec{a}_z \, 10 \, e^{j(\omega t - 10y)}\right\}$$

$$= \vec{a}_z \, 10 \cos(\omega t - 10y) \quad (A/m)$$

وبنفس الطريقة :-

$$E(y,t) = -1200\pi \cos(\omega t - 10y)\,\vec{a_x}$$

Problem #5

Given:-

$$E(z,t) = 10^3 \cos(6\times10^8 t - \beta_o z)\,\vec{a_x} \quad (V/m)$$

in free space. Sketch the wave at $t=0$ and at time t_1 when it has travelled $\frac{\lambda}{4}$ along the z-axis. Find t_1, β_o, λ.

Solution

نعرف أن سرعة انتشار موجة كهرومغناطيسية في الهواء تساوي 3×10^8.

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{\lambda/4}{3\times10^8}$$

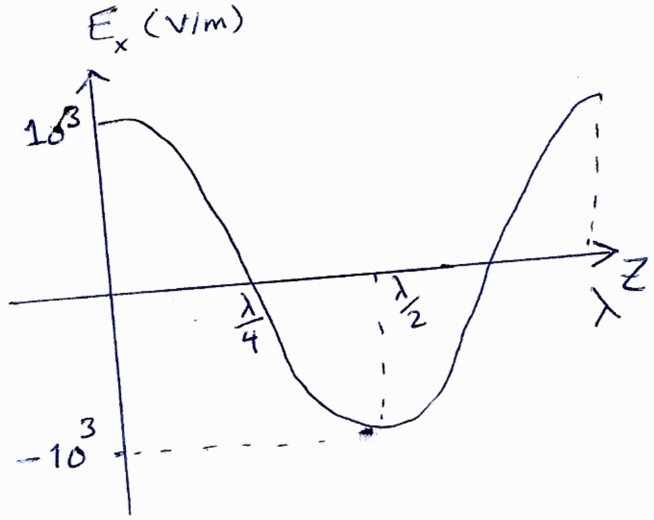
$$\omega = 6\times10^8 \text{ rad/s} \Rightarrow \beta_o = 6\times10^8 \cdot \sqrt{\mu_o \epsilon_o} = 2 \text{ rad/m}.$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_o} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ m}.$$

$$\therefore t_1 = \frac{0.25\lambda}{3\times10^8} = \frac{0.25\times\pi}{3\times10^8} = 2.62 \text{ ns}$$

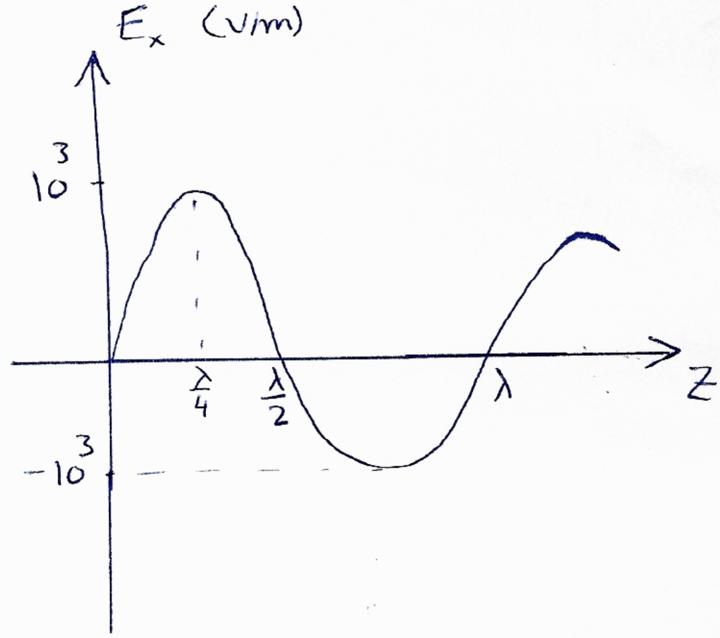
عندما $t=0$:-

$$E(z,0) = 10^3 \cos(-\beta_o z) = 10^3 \cos \beta_o z$$



وعندما $t=2.62ns$:-

$$E(Z, 2.62ns) = 10^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_o Z\right)$$
$$= 10^3 \sin \beta_o Z$$



Problem#6

If $\hat{E} = \hat{E}_o e^{-j\beta_o z}$, what polarization

Correspond to:

a) $E_o = \vec{a}_y$

b) $E_o = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y$

c) $E_o = \vec{a}_x - j\vec{a}_y$

Solution

بالنسبة لموجة مجالها الكهربي مركب من مركبتين :-

$$E(z,t) = E^+_{mx} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\vec{a}_x + E^+_{my} \cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\vec{a}_y$$

"لاحظ أن كليهما ينتشر في اتجاه $+z$ ".

فإن استقطاب (polarization) هذه الموجة يكون له أحد الحالات التالية :-

1 - استقطاب خطي (linear polarization) :

وذلك إذا كان $\phi_x = \phi_y$ ، أي أنه لا يوجد فرق في الطور بين المركبتين .

فيكون المجال الكهربي خطاً مستقيماً على امتداد انتشار الموجة يميل

بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{E_{my}}{E_{mx}}\right)$ عن محور X .

2 - استقطاب دائري (circular polarization)

وذلك إذا كان الفرق بين Φ_y و Φ_x هو $90°$ ، وفي نفس الوقت يكون $E_{mx} = E_{my}$. فيرسم المجال الكهربي دائرة على امتداد انتشار الموجة يكون دورانها في اتجاه عقرب الساعة (clockwise) إذا كان $\Phi_y - \Phi_x = -90°$ ، ويكون اتجاه الدوران عكس عقرب الساعة (counter clockwise) إذا كان $\Phi_y - \Phi_x = 90°$.

3 - قطع ناقص (elliptical polarization)

وذلك إذا لم تتحقق شروط الاستقطاب الخطي أو الدائري .

a)

Linearly polarized wave (y-polarized).

وذلك لأنه لا توجد سوى مركبة واحدة للمجال الكهربي .

b)

Linearly polarized wave

وذلك لعدم وجود فرق في الطور بين المركبتين . يميل خط المجال الكهربي عن محور x بزاوية

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.4°$$

c)

$$E_o = \vec{a}_x - j\,\vec{a}_y = \vec{a}_x + e^{-j90°}\,\vec{a}_y$$

الاستقطاب يكون دائرياً لتساوي مقداري المركبتين ولوجود فرق طور $90°$. اتجاه الدوران يكون في اتجاه عقرب الساعة لأن مركبة y متأخرة عن مركبة x بـ $90°$.

Problem#7 (Problem 2-45)

Prove (2-133) for the polarization ellipse obtained whenever E_x and E_y differ in phase by the general angle θ.

Solution

لدينا في المستوى $z=0$:-

$$E_x = E_{mx}\cos(\omega t) \Rightarrow \cos\omega t = \frac{E_x}{E_{mx}} \longrightarrow (1)$$

$$E_y = E_{my}\cos(\omega t+\theta)$$

$$= E_{my}\left[\cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta\right]$$

$$\frac{E_y}{E_{my}} = \cos\theta\,\frac{E_x}{E_{mx}} - \sin\theta\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}} \longrightarrow (2)$$

وذلك بإستخدام المعادلة (1) والمتطابقة $\sin\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi}$.

بتربيع طرفي المعادلة (2) :

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} = \cos^2\theta\,\frac{E_x^2}{E_{mx}^2} + \sin^2\theta\left(1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}\right) - 2\frac{E_x}{E_{mx}}\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}}\,\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right) + \sin^2\theta - 2\,\frac{E_x}{E_{mx}}\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}}\,\sin\theta\cos\theta$$

وباستخدام المتطابقة $\cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$:-

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} = \frac{E_x^2}{E_{mx}^2}\left(2\cos^2\theta - 1\right) + \sin^2\theta - 2\frac{E_x}{E_{mx}}\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} = 2\cos^2\theta\frac{E_x^2}{E_{mx}^2} + \sin^2\theta - 2\frac{E_x}{E_{mx}}\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\cos\theta\frac{E_x}{E_{mx}}\left[\cos\theta\frac{E_x}{E_{mx}} - \sin\theta\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{mx}^2}}\right] + \sin^2\theta$$

ولكن مابين القوسين المربعين هو $\frac{E_y}{E_{my}}$ وذلك من المعادلة (2) :

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} = 2\cos\theta\frac{E_x}{E_{mx}}\frac{E_y}{E_{my}} + \sin^2\theta$$

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} - \frac{2\cos\theta}{E_{mx}E_{my}}E_xE_y - \sin^2\theta = 0$$

#

م/عبدالله عياد أبوقرين.

خريف 2012.